$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \left|\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{b-a}{b'-a} = i$

$\Leftrightarrow b - a = i(b' - a) \Leftrightarrow b - a + ia = ib'$

En multipliant la dernière égalité par $(-i)$ on aura :

$$\boxed{b' = -ib + a(1+i)}$$

De même le triangle ACC' est un triangle rectangle et isocèle de sens direct en A donc

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ AC' = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \left|\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \end{cases}$$

Donc $\frac{z_{C'} - z_A}{z_C - z_A} = i$ c'est-à-dire $\frac{c'-a}{c-a} = i$

$\Leftrightarrow c' - a = i(c - a) \Leftrightarrow c' = ic - ia + a$

Donc : $\boxed{c' = ic + a(1 - i)}$

●

a) $B'C' = |c' - b'| = |(ic + a - ia) - (-ib + a + ia)|$

$= |i(c + b) - 2ia|$

$= |i| \cdot |c + b - 2a|$

Comme $|i| = 1$ on aura $B'C' = |c + b - 2a|$

Aussi on a: $2AM = 2|m - a| = 2\left|\frac{b+c}{2} - a\right|$

$= |2x\left(\frac{b+c}{2} - a\right)|$

$= |b + c - 2a| = B'C'$

Conclusion :

$$\boxed{B'C' = 2AM}$$

b) On a : $\frac{b'-c'}{m-a} = \frac{2ia - i(b+c)}{\frac{b+c}{2} - a}$

$= \frac{i(2a - b - c)}{\frac{b+c-2a}{2}}$

$\frac{b'-c'}{m-a} = = \frac{2i(2a-b-c)}{b+c-2a} = \frac{-2i(b+c-2a)}{b+c-2a}$

$= -2i$

donc $\frac{aff(\overrightarrow{B'C'})}{aff(\overrightarrow{AM})}$ est un imaginaire pur par suite les droites (B'C') et (AM) sont perpendiculaires

Exercice n° 10 (à rectifier A(1))

$Z_A = 1$, $Z_B = -i$, $Z_M = z$ et $Z_{M'} = z' = \frac{1-z}{1-iz}$

● a) $z' = \frac{1-z}{1-iz} = \frac{1-z}{i(-i-z)} = -i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)$

z' est réel $\Leftrightarrow Z' = 0$ ou $\text{Arg}z' = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}\left[-i\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right] = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(-i) + Arg\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right) = k\pi$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $Z = 1$

D'où M décrit le cercle de diamètre [AB] privé de B .

b) $|z'| = \left|\frac{1-z}{1-iz}\right| = \left|(-i)\left(\frac{z-1}{z-(-i)}\right)\right|$

$= |-i| \cdot \left|\frac{z-1}{z-(-i)}\right| = \left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right|$ car $|-i| = 1$

donc $|z'| = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$

Par suite $|z'| = 1$ si et seulement si $AM = BM$

Dans ce cas M décrit la médiatrice du segment [AB]

Carray.tn - Aqra Bien - Carray.tn